

Gheorghe ANDREI

Constantin CARAGEA

PARTEA ÎNTREAGĂ $[x]$
PARTEA FRAȚIONARĂ $\{x\}$

$$x = [x] + \{x\}$$

VOLUMUL II



Editura Paralela 45

CUPRINS

	Enunțuri	Soluții
Prefață	7	
Introducere	9	
Capitolul XIII Elemente de aritmetică	11-17	18-40
Capitolul XIV Sume	41-57	58-110
Capitolul XV Inegalități.....	111-118	119-150
Capitolul XVI Șiruri	151-169	170-222
Capitolul XVII Funcții	223-238	239-302
Capitolul XVIII Probleme diverse	303-312	313-349
Capitolul XIX Paragrafe speciale	350-410	
Bibliografie	411	

capitolul

13

Elemente de aritmetică

- § 1.
- 1*. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Să se determine:
- $\lfloor \sqrt{n^2 + n} \rfloor$;
 - Prima zecimală a numărului $\sqrt{n^2 + n}$;
 - Să se determine ultima cifră a numărului $\lfloor 10 \cdot \sqrt{n^2 + n} \rfloor$.
2. Arătați că pentru $n \geq 5$ numărul a_n , egal cu partea fracționară a numărului $\sqrt{n^2 + 2n}$, are prima zecimală 9.
Există n pentru care a_n are primele 2011 zecimale egale cu 9?
3. Fie $n \in \mathbb{N}^*$.
- Să se determine prima zecimală a șirului $a_n = \sqrt{n^2 + n}$;
 - Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care prima zecimală a numărului $b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ este 2;
 - Determinați prima zecimală de ordinul 1 a șirului $c_n = \sqrt{4n^2 + n}$.
4. Determinați toate numerele naturale $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care a doua zecimală a numărului $\lfloor \sqrt{n(n+1)} \rfloor$ nu este 9.
5. Determinați cel mai mic număr natural pentru care primele două zecimale ale numărului $\sqrt{n^2 + 4n + 1}$ sunt egale cu 9.
- 6**. Determinați numerele naturale nenule n pentru care numărul:
- $$A = \left\lfloor \frac{n^3 + 8n^2 + 1}{3n} \right\rfloor \text{ este prim.}$$
- 7**. Să se determine cel mai mic număr natural pentru care
- $$0,7 < \sqrt[3]{n} < 0, (7).$$
- 8**. Descrieți forma numerelor naturale n pentru care $1 + \lfloor \sqrt{2n} \rfloor$ divide pe $2n$.
- 9**. Demonstrați că există o infinitate de numere naturale n pentru care partea întreagă a numărului $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$ este diferită de partea întreagă a numărului $\sqrt{n} + \sqrt{n+1}$.
- 10**. Să se determine $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $\lfloor n\sqrt{2} \rfloor = \lfloor n\sqrt{3} \rfloor$.
- 11**. Să se arate că nu există $m, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\{2^m\sqrt{5}\} = \{3^n\sqrt{5}\}$.

12. Arătați că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 4$, numărul $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ este compus.

13*. Determinați numerele naturale n care satisfac simultan proprietățile:

a) $\left\lfloor \frac{n}{9} \right\rfloor$ este număr natural de trei cifre egale;

b) $\left\lfloor \frac{n+36}{4} \right\rfloor$ este un număr natural de patru cifre, cifrele fiind $\{2,0,0,9\}$.

14. Să se determine $a > 0$ știind că $a^2 + 2[a]$ să fie pătrat perfect.

15. Să se arate că $a_n = \left\lfloor \frac{n+3}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+5}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n^2 + 3n + 3$ este pătrat perfect, pentru $\forall n \in \mathbb{N}$.

16.** Să se determine valorile lui $n \in \mathbb{N}$ pentru care:

a) $\left\lfloor \frac{n^2}{3} \right\rfloor$ este număr prim;

b) Să se determine cel mai mare $n \in \mathbb{N}$, pentru care $\left\lfloor \frac{n^2}{5} \right\rfloor$ este număr prim.

17.** Să se arate că dacă $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 4$ și $\left\lfloor \frac{2^n}{n} \right\rfloor$ este o putere a lui 2, atunci n este o putere a lui 2.

18*.** Fie $a, n \in \mathbb{N}^*$ cu $a < \sqrt{2n}$. Să se arate că numărul $\left\lfloor \frac{n^2}{a^2} \right\rfloor$ este pătrat perfect, dacă și numai dacă n se divide cu a .

19.** Fie $a, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\{\sqrt{n+\sqrt{n}}\} = \{\sqrt{a}\}$. Arătați că $4a+1$ este pătrat perfect.

20. Fie p un număr prim, $p \geq 3$ și d un număr liber de pătrate.

Pentru ce valori ale lui $n \in \mathbb{N}$ are loc egalitatea: $\left\{n\sqrt{d} + \frac{n}{p}\right\} = \{n\sqrt{d}\}$?

21.** Să se arate că: $\left\lfloor a \left\lfloor \frac{n+a^2}{a} \right\rfloor + a \right\rfloor = n, \forall n \in \mathbb{N}^*,$ unde $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

22.** Fie $a \in \mathbb{R}_+^*$, numărul de aur, adică soluția pozitivă a ecuației $x^2 - x - 1 = 0$.

(Ecuația caracteristică a șirului lui Fibonnaci)

Să se arate că $[a^2n] \equiv [a[an]] + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

23.** Fie $a, b, a > b$ rădăcinile ecuației: $x^2 - x - 1 = 0$ și $\sigma_n = a^n + b^n$,

$n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că: $[a\sigma_n] = \begin{cases} \sigma_{n+1} & , \text{ dacă } n \text{ par} \\ \sigma_{n+1} - 1 & , \text{ dacă } n \text{ impar} \end{cases}$

24.** Fie $a, b \in \mathbb{R}, a > b$ rădăcinile ecuației $2x^2 - 2x - 1 = 0$.

Să se arate că: $[b^n \sqrt{3}] = \begin{cases} 0 & , \text{ } n \text{ par} \\ -1 & , \text{ } n \text{ impar} \end{cases}$

25.** Fie $a \in \mathbb{N}^*$ și $E(a) = \{\sqrt{a}\} + \{\sqrt{a}\}^2 + \{\sqrt{a}\}^3$. Să se demonstreze că $E(a)$ este rațional dacă și numai dacă a este pătrat perfect.

26. Să se arate că numărul natural $n \geq 1$ este pătrat perfect dacă și numai dacă $[\sqrt{n}] - [\sqrt{n-1}] = 1$.

27. Să se arate că $[\sqrt{n}] = [\sqrt{n+1}]$ dacă și numai dacă $n+1$ nu este pătrat perfect.

28. Pentru $n \in \mathbb{N}$, notăm cu $s(n)$ numărul de reprezentări distincte ale lui n ca sumă de două numere naturale ($n = a + b$ și $n = b + a$ constituie aceeași reprezentare). Să se arate că:

$$a) s(m+n) = s(m) + s(n) - \frac{1}{2}(1 + (-1)^{mn});$$

$$b) \sum_{k=0}^n s(k) = \left[\frac{n}{2} \right] \cdot \left[\frac{n+1}{2} \right].$$

29. Fie a și b două numere reale pozitive, care nu sunt pătrate perfecte, $a < b$. Atunci numărul pătratelor perfecte situate între a și b este:

$$[\sqrt{b}] - [\sqrt{a}].$$

30*. Fie a și b două numere întregi, care nu sunt cuburi perfecte.

Atunci numărul cuburilor perfecte situate între a și b este: $[\sqrt[3]{b}] - [\sqrt[3]{a}]$.

31. Să se determine numărul natural n , astfel încât expresia: $n + 4^{[\sqrt{n}]} + 3$ să fie pătrat perfect.

32.** Să se arate că oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, între n și $2n$ există un pătrat perfect.

33*.** Determinați numerele naturale nenule, care nu sunt pătrate perfecte și pentru care $[\sqrt{n}]^3$ divide n^2 .

34. Fie p un număr natural prim și k un număr natural dat. În câte moduri se poate scrie p^k sub formă de diferență a două pătrate perfecte?

35. Să se determine numărul $\overline{abcd}$ știind că:

$$[\sqrt{ca}] + [\sqrt{cb}] + [\sqrt{cc}] + [\sqrt{cd}] = \sqrt{\overline{abcd}}.$$

36. Determinați numerele $\overline{abc}$ știind că: $[\sqrt{bca}] = 2[\sqrt{\overline{abc}}]$.

37. Să se determine numerele $\overline{abc}$ știind că:

a) $\left[\sqrt{\overline{abc}} \right] = 11 = a + b + c;$

b) $\left[\sqrt{\overline{abc}} \right] = 21$ și $a + b + c = 15.$

38. Determinați $\overline{ab}$ dacă $\left[\overline{a, b^3} \right] = \overline{a, b}.$

39. Determinați cifrele a, b distincte, nenule știind că:

$$\left[\sqrt{\overline{abb}} \right] + \left[\sqrt{\overline{bba}} \right] + \left[\sqrt{\overline{bab}} \right] = a + \overline{bb}.$$

§ 2.

40. Numărul numerelor $p \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ care se divid la numărul $1 \leq k \leq n$ este egal cu $\left[\frac{n}{k} \right].$

41. Câte numere naturale există printre numerele $\frac{1m}{n}, \frac{2m}{n}, \frac{3m}{n}, \dots, \frac{pm}{n},$ unde $m, n, p \in \mathbb{N}^*?$

42. În câte zerouri se termină $400!?$

43. Să se determine exponentul lui 108 în $253!.$

44. Să se determine valoarea numitorului fracției după simplificare:

$$N = \frac{100!}{6^{100}}.$$

45. Să se determine exponentul α al numărului prim p în $(p^n)!, (n \in \mathbb{N}^*).$

46**. Să se determine în câte zerouri se termină $p!,$ unde

$$p = \frac{5^n - 1}{4}, (n \in \mathbb{N}^*).$$

47**. Să se arate că oricare ar fi numărul natural $n \in \mathbb{N}^* - \{1\},$ numărul $n!$ nu se divide la $2^n.$

48**. Să se determine $\left[\frac{10^{2017}}{S_{2014}} \right],$ unde: $S_n = 1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{111 \dots 1}_{n \text{ ori}}.$

49*. Să se determine ultima cifră a numărului $\left[\frac{10^{93}}{10^{31} + 3} \right] = [A].$

50**. Factorialul căror numere se termină exact în 1000 de zerouri?

51**. a) Să se arate că $\{\varphi\} = \frac{1}{\varphi}, \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2};$

b) Să se calculeze $\left\{ \frac{99^{99}}{1 - 99^9} \right\}, \left[\frac{99^{99}}{1 - 99^9} \right].$

52**. Să se determine ultima cifră a numărului $A = \left[\frac{10^{20000}}{10^{100} + 3} \right].$

53**. Să se determine exponentul lui 2 în descompunerea în factori a numărului: $A_n = (n + 1)(n + 2) \dots (2n).$

54**. Fie $a = \sqrt{111 \dots 11 \dots}$ (de 1998 ori). Să se determine:

- $[a]$;
- a mia zecimală a numărului.

55**. Să se determine valorile lui $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ astfel încât $[\sqrt[n]{111}]$ să dividă numărul 111.

56*. Fie $a = \{\sqrt{123456789}\}$. Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$, știind că

$$\frac{1}{n+1} < a < \frac{1}{n}.$$

57*. Să se determine $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ astfel încât $[\sqrt[n]{53}]$ să dividă pe 35.

58. Arătați că $1997!$ se divide la 19^{97} și nu se divide la 19^{111} .

59*. Să se arate că $\{\sqrt{333 \dots 3}\} \neq \{\sqrt{22 \dots 2}\}$ unde numerele de sub semnul radical au același număr de cifre.

60*. Determinați numerele naturale n pentru care:

$$\left\{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right\} = 0,08(3).$$

61. Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât: $[1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n}] = n$.

62. Fie $n, k \in \mathbb{N}^*$ și $E_{n,k} = n! \left(\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \dots + \frac{1}{(n+k)!} \right)$.

Să se arate că:

- $E_{n,k} \notin \mathbb{N}^*$;
- Să se calculeze $[E_{n,k}]$.

63***. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că:

- $\frac{[n!e] - 1}{n} \in \mathbb{N}$;
- $\frac{[n \cdot n!e] - n}{n^2} \in \mathbb{N}$.

64*. Care este cel mai mic număr natural n , pentru care numerele reale $\sqrt{n}$ și $\sqrt{n+9}$ au aceeași parte întreagă?

65**. Să se determine numerele naturale n cu proprietatea că $[\sqrt{n}]$ divide pe n .

66***. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, ce valoare poate avea $a_n = \left[\sqrt{\sqrt{n}[n\sqrt{n}]} \right]$?

67**. Fie $p > 2$ număr prim. Determinați numerele naturale n , pentru care $\{\sqrt{n}\} = \{\sqrt{n+p}\}$.

68**. Să se compare mediile aritmetice ale mulțimilor de numere:

$$\left\{ \left[\frac{2012}{1} \right], \left[\frac{2012}{2} \right], \dots, \left[\frac{2012}{2012} \right] \right\} \text{ și } \left\{ \left[\frac{2013}{1} \right], \left[\frac{2013}{2} \right], \dots, \left[\frac{2013}{2013} \right] \right\}.$$

69**. Determinați numerele naturale n pentru care: $\{\sqrt{m}\} = \{\sqrt{m+2011}\}$.